Dr. Emanuel Scheidegger
Dr. Christoph Kawan

Topologie
SS 10

Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 6

Orientierung von Mannigfaltigkeiten

21. Volumenform auf Untermannigfaltigkeiten.
(4 Punkte) Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : V \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, die die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt. Wir setzen $M = f^{-1}(0)$. Für jede offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $W \subset V$, ist $M \cap W$ nach Aufgabe 13 eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Es sei $\omega \in \Omega^{n-1}(W)$ so, daß $\mathrm{d}f|_W \wedge \omega$ eine Volumenform auf W ist. Zeigen Sie, daß dann $\omega|_{M\cap W}$ eine Volumenform auf $M \cap W$ ist.

22. Volumenform auf S^n.

    (a) (3 Punkte) Es seien V, $f : V \to \mathbb{R}$ und $M = f^{-1}(0)$ wie in Aufgabe 21. Es sei
    $$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \mathrm{d}x_n$$
    wobei $\widehat{\ }$ wie üblich das Weglassen des entsprechenden Differentials bedeutet. Zeigen Sie, daß ω eine Volumenform auf M ist.

    (b) (1 Punkt) Finden Sie eine Volumenform ω auf S^n, berechnen Sie das Volumen $\int_{S^n} \omega$ und zeigen Sie, daß ω nicht exakt ist.

23. Orientierung der projektiven Räume.
Es sei $f : S^n \to S^n$ die antipodale Abbildung aus Aufgabe 11 und $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ die kanonische Projektion, die zur Äquivalenzrelation $\sim_f$ assoziiert ist. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (2 Punkte) Es sei $\omega \in \Omega^n(\mathbb{RP}^n)$ eine Volumenform. Dann ist $\pi^*\omega$ eine Volumenform auf S^n, die unter f^* invariant ist.

    (b) (1 Punkt) Es sei $\sigma \in \Omega^n(S^n)$ eine Volumenform, die unter f^* invariant ist. Dann gibt es eine eindeutige Differentialform $\omega \in \Omega^n(\mathbb{RP}^n)$, so dass $\pi^*\omega = \sigma$.

(c) (1 Punkt) $\mathbb{RP}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.

24. Eigenschaften von Orientierbarkeit und Orientierung.
Ein topologischer Raum heisst zusammenhängend, falls er nicht die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß eine orientierbare und zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit genau zwei Orientierungen besitzt. (Zeigen Sie dazu, daß eine Mannigfaltigkeit M genau dann zusammenhängend ist, wenn jede Abbildung $M \to D$ in eine diskrete Menge D konstant ist.)

    (b) (1 Punkt) Es seien M und N orientierte und zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeiten mit orientierten Atlanten $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, daß für einen Diffeomorphismus $f : M \to N$ der Atlas $f^{-1}(\mathcal{B})$ orientiert ist.

    (c) (1 Punkt) Es seien M und N glatte orientierte Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass $M \times N$ eine glatte orientierte Mannigfaltigkeit ist.

    (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß der 2–Torus T^2 aus Aufgabe 10 orientierbar ist, und geben Sie eine Orientierung an.

Abgabetermin: Freitag, 11. 6. 2010 um 10:00 Uhr.